

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (2 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 2m = 0$ (m là tham số).

- Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Chứng minh $x_1^4 + x_2^4 > \frac{9}{2}$.
- Chứng minh $(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1})(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}) = 1$ khi và chỉ khi $m = -1$.

Câu 2 (1.5 điểm). Người ta muốn ghi bốn số thực ở bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ (mỗi đỉnh một số) thỏa mãn:

- Bốn số được ghi là đôi một phân biệt;
 - Tổng hai số được ghi ở hai đầu của cạnh AB là 0;
 - Tổng hai số được ghi ở hai đầu của ba cạnh còn lại là ba giá trị phân biệt: 1, 2, 3.
- Hãy chỉ ra một cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên.
 - Trong các cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên, tìm cách ghi có tổng bình phương của các số ở bốn đỉnh là nhỏ nhất.

Câu 3 (2 điểm). Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn: $m^2 + m + n^2$ chia hết cho tích mn (1).

- Chứng minh không tồn tại m, n thỏa mãn (1) khi $n = 3$.
- Tìm m, n thỏa mãn (1) biết m chia hết cho n .
- Ký hiệu d là ước chung lớn nhất của m và n . Chứng minh nếu m, n thỏa mãn (1) thì $m = d^2$.

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ và điểm D trên cung nhỏ AC sao cho $CD > AB$. Đường trung trực của DB cắt AB tại E ; đường trung trực của DC cắt AC tại F .

- Chứng minh các điểm A, D, E, F thuộc một đường tròn và đường tròn này đi qua tâm O của (O) .
- Chứng minh rằng tam giác DBE và tam giác DCF đồng dạng. Chứng minh rằng đường cao qua D của tam giác DEF và đường cao qua A của tam giác ABC cắt nhau trên (O) .
- Ký hiệu (I) là đường tròn tâm I , đi qua các điểm A, D, E, F . Tiếp tuyến của (I) tại O cắt tiếp tuyến của (O) tại D ở S . Gọi R là trung điểm OD và K là giao điểm của SI với đường tròn ngoại tiếp tam giác SDO ($K \neq S$). Chứng minh $\widehat{RKD} = 90^\circ$ và DK đi qua trung điểm của IR .

Câu 5 (1.5 điểm). Cho bảng ô vuông kích thước 2×9 và số nguyên dương $k \leq 18$. Hai ô của bảng được gọi là *kề bên* nếu chúng có một cạnh chung. Hai bạn An và Bình chơi trò "Truy Tìm Tàu Ngầm" như sau: Trước khi trò chơi bắt đầu, An chọn một ô trên bảng và không cho Bình biết. Ở mỗi lượt chơi:

- An phải chọn một ô mới, kề bên với ô đã chọn trước đó, và không cho Bình biết;
 - Sau khi An chọn xong, Bình chọn k ô của bảng và hỏi An: trong k ô này có ô An vừa chọn hay không? Nếu có thì Bình thắng, nếu không thì hai bạn lại chơi lượt tiếp theo.
- Xét $k = 4$. Chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 8 lượt chơi.
 - Xét $k = 2$. Chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 16 lượt chơi.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Giám thị không giải thích gì thêm.